

Рисунок 14 – Применение термоизоляционного материала  
(а – схема; б – решение задачи теплопроводности)

**Список литературы:** 1. Справочник металлста. В 5-ти т. Т.1. // Под ред. С.А.Чернавского и В.Ф.Реицкова. – М.: Машиностроение, 1976. – 768 с. 2. URL: <http://www.kombat.com.ua/> (Термическая обработка стали). 3. Heat processing technology and industrial furnaces. Рекламный проспект Swiss Association of Machinery Manufacturers (VSM). Published by the «Industrial Furnace Group» of the VSM, Kirchenweg 4, CH-8032 Zurich-Switzerland. 4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с. 5. В.И.Мяченков, В.П.Мальцев и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В.И.Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с. 6. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с. 7. Гохфельд Д.А., Гецов Л.Б. и др. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник. – Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 405 с.

Поступила в редколлегию 10.05.2006

УДК 534; 629.113

**Ю.В.МИХЛИН**, докт. физ.-мат. наук; **С.Г.МИТРОХИН**, НТУ «ХПИ»

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЯ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРУЖИН ПОДВЕСКИ

В роботі проведено дослідження свободних загасаючих коливань у автомобілі з нелінійною характеристикою підвіски. Розглянуто нелінійну модель з 7 степенями волі. В результаті дослідження отримано нелінійні форми коливань і відповідні скелетні криві. Описані перехідні процеси у системі. Отримані результати порівняно з рішеннями лінеаризованої системи.

Free damped oscillations in the automobile with a nonlinear response of the suspension are considered. The 7-DOF nonlinear model is considered. As a result, nonlinear vibration modes and the corresponding skeleton curves are obtained. The transient is described in this system. The obtained results are compared with solutions of the corresponding linearized system.

**1. Введение.** Ходовая часть автомобиля является одной из наиболее важных частей автомобиля с точки зрения безопасности. Создание подвески, которая одновременно обеспечивает плавность хода и безопасность, представляет сложную проблему, как для исследователей, так и для конструкторов. Анализ колебательных процессов в автомобиле необходим для оценки поведения машины при ее движении. Такое исследование позволяет оценить качество подвески, прежде всего, а также представить колебательный процесс во времени. Создание новых аналитических методов, а также использование современной техники вычислений позволяет решать подобные задачи и в нелинейной постановке.

Не имея возможности сослаться на многочисленные публикации по динамике автомобиля, упомянем лишь фундаментальные работы [1,2], а также некоторые работы последних лет [3-5]. Следует отметить, что в связи со сложностью задачи исследования динамики подвески в нелинейной постановке, в большинстве работ рассматривается лишь упрощенная модель симметричных колебаний автомобиля (так называемая «quarter-car» модель).

В настоящей работе на основе модели динамики автомобиля с семью степенями свободы, в которой учтены нелинейные характеристики пружин подвески, построены нелинейные формы колебаний автомобиля и соответствующие скелетные кривые. Проведен также расчет переходных режимов движения.

**2. Постановка задачи.** На рис. 1 изображена эквивалентная модель легкового автомобиля с независимой подвеской, которая рассматривалась в работе [6]. Исследование динамического процесса проводится в двух плоскостях: продольной вертикальной ( $xOz$ ) и поперечной ( $yOz$ ).

В представленной модели автомобиля шины представляются в виде жесткостных элементов с линейными характеристиками. Подвеска характеризуется демпфирующими элементами и нелинейными характеристиками передних и задних пружин (см. рис. 2). Силы, возникающие в передней и задней подвесках при растяжении-сжатии пружин, описываются полиномами седьмой степени. Эти характеристики являются типичными, полученными в результате экспериментов. Некоторые данные по характеристикам пружин приведены в работе [7].

Для представленной выше модели предполагается:

- провести анализ свободных колебаний автомобиля с трением в нелинейной постановке;
- построить нелинейные нормальные формы колебаний и представить их графически;
- построить соответствующие скелетные кривые;
- сравнить свободные колебания исходной нелинейной и линеаризованной систем.

**3. Математическая модель.** Колебания в представленной модели описываются семью обобщенными координатами. Колебания кузова характеризуется вектором обобщенных координат  $x = \{z \ \alpha \ \beta\}^T$ , а колебания частей подвески – векто-

ром  $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$ . Матрицы масс кузова  $M_C$  и частей подвески  $M_B$ , матрица жесткости шин  $C$  и матрица демпфирования  $K$  имеют диагональный вид.

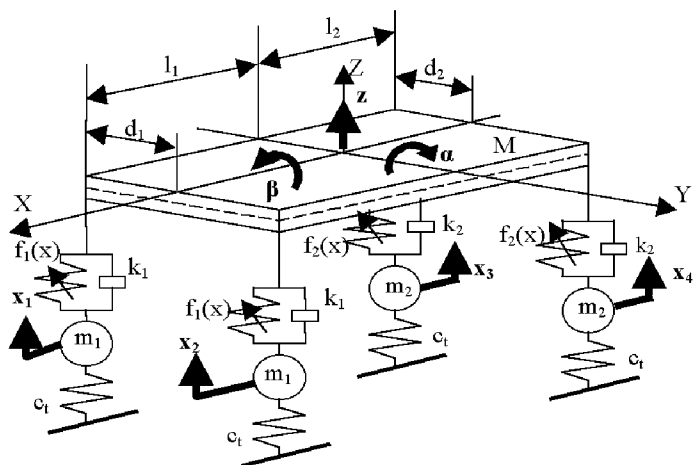


Рисунок 1 – Модель легкового автомобиля с независимой подвеской

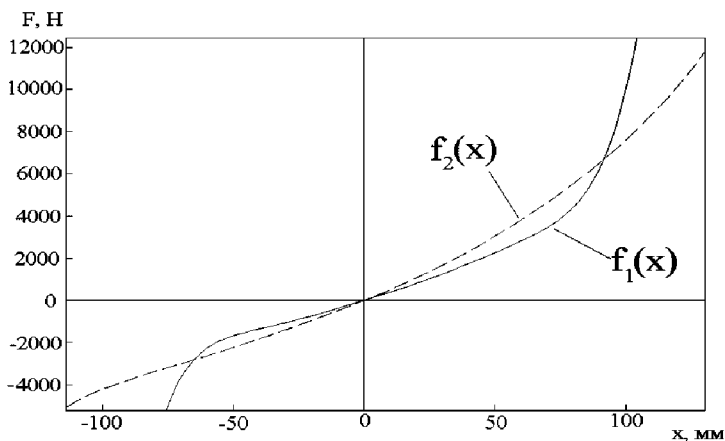


Рисунок 2 – Нелинейные характеристики пружин передней  $f_1(x)$  и задней  $f_2(x)$  подвесок

Перемещения углов кузова можно выразить через перемещение центра тяжести кузова с помощью следующей матрицы перехода:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -l_1 & d_1 \\ 1 & -l_1 & -d_1 \\ 1 & l_2 & d_2 \\ 1 & l_2 & -d_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

С помощью матрицы перехода (1) запишем выражения для разности перемещений  $U = Hq - x$  и скоростей  $V = H\dot{q} - \dot{x}$  между кузовом и частями подвески. С учетом разницы перемещений вектор нелинейных характеристик будет иметь вид:

$$C_{NL} = \{f_1(U_1) \quad f_1(U_2) \quad f_2(U_3) \quad f_2(U_4)\}^T. \quad (2)$$

Окончательно получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в матричном виде, описывающую свободные колебания автомобиля:

$$\begin{cases} M_c \ddot{q} + H^T C_{NL} + H^T KV = 0, \\ M_s \ddot{x} - C_{NL} + Cx - KV = 0. \end{cases} \quad (3)$$

**4. Методика решения.** Для исследования свободных колебаний нелинейной системы (3) воспользуемся методом нормальных форм Пьера-Шоу [8,9]. Для того, чтобы использовать этот метод, исходная система  $N$  дифференциальных уравнений второго порядка  $\ddot{x} - f(x, \dot{x}) = 0$  должна быть приведена к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

где  $x = \{x_1 \dots x_N\}^T$  – вектор обобщенных координат,  $y = \{y_1 \dots y_N\}^T$  – вектор обобщенных скоростей и  $f = \{f_1 \dots f_N\}^T$  – вектор сил системы.

Выберем пару новых независимых переменных  $(u, v)$ , где  $u$  – некоторая обобщенная координата, а  $v$  – соответствующая обобщенная скорость. Нормальная форма колебаний в концепции Пьера-Шоу – это такой колебательный режим, когда все остальные обобщенные координаты и скорости являются однозначными функциями выделенной пары переменных. В нелинейном случае нормальные формы колебаний представляют собой обобщение нормальных (главных) колебаний линейных систем.

Выбирая в качестве выделенной пары переменных координату и скорость с индексом 1, запишем представление соответствующей формы колебаний в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ X_2(u, v) \\ Y_2(u, v) \\ \vdots \\ X_N(u, v) \\ Y_N(u, v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Вычисляя производную по времени для каждой из переменных системы (5), учитывая, что  $u = u(t)$  и  $v = v(t)$ , и подставляя полученные выражения в систему (4), получаем, с учетом уравнений движения (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} f_1(x, v) &= Y_i(u, v), \\ \frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} f_1(x, v) &= f_i(x, v), \\ i &= \overline{1..N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы уравнений в частных производных (6) будем искать в виде степенных рядов (в конкретных вычислениях сохраняются члены до седьмой степени включительно по переменным  $u$  и  $v$ ):

$$\begin{aligned} x_i &= X_i(u, v) = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + \dots, \\ y_i &= Y_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ряды (7) подставляются в (6) и коэффициенты при одинаковых степенях приравниваются, образуя рекуррентные системы алгебраических уравнений. Решая системы, находим коэффициенты разложений (7), и, таким образом, определяется первая форма колебаний.

Полученная форма колебаний в виде рядов (7) подставляется в те дифференциальные уравнения системы (4), которые соответствуют выбранной паре переменных  $u$  и  $v$ . При этом получается система уравнений следующего вида:  $\dot{u} = v$ ,  $\dot{v} = f_1(u, v)$ . Отсюда можно определить скелетную кривую, соответствующую этой форме колебаний.

Таким же образом, выбирая другие пары новых независимых переменных, можно определить другие формы колебаний системы. В рассматриваемой системе существует семь нелинейных нормальных форм колебаний. Коэффициенты рядов, отвечающие всем этим формам колебаний, здесь не приводятся.

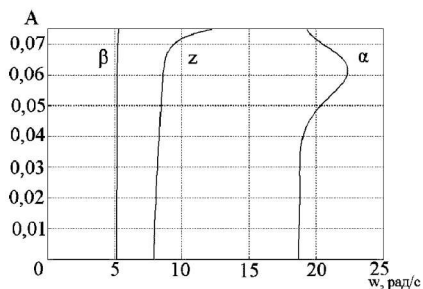
**5. Анализ результатов.** В этом разделе приведены графические представления нелинейных форм колебаний, полученных указанным методом.

Для построения скелетных кривых, то есть, амплитудно-частотных характеристик нелинейной системы использовался метод гармонической линеаризации с движением по параметру [10]. Метод применялся для каждой системы дифференциальных уравнений, описывающих выделенную пару независимых переменных, соответствующих одной из форм колебаний. Скелетные кривые представлены на рис. 3.

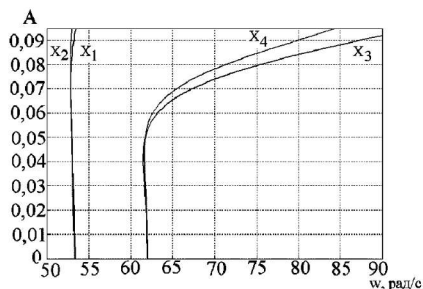
На рис. 4 показана первая форма колебаний, причем в качестве независимой переменной выбрана координата  $z$ .

На рис. 5-9 представлены результаты расчета переходных процессов в подвеске автомобиля. На рисунках изображены режимы движения как для нелинейной, так и для линеаризованной систем. В некоторых случаях наблюдалось уменьшение амплитуд нелинейных колебаний частей авто-

мобили по сравнению с линейными колебаниями. При больших начальных смещениях частота колебаний неподрессоренных масс снижается быстрее, и все формы колебаний приближаются к низкочастотным формам колебаний кузова. При малых отклонениях свободные колебания нелинейной системы почти не отличаются от линейных колебаний, поскольку характеристика пружин около положения равновесия описывается линейным законом.

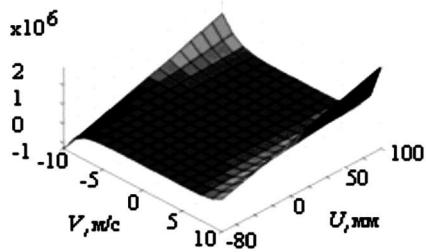


а) Для координат кузова

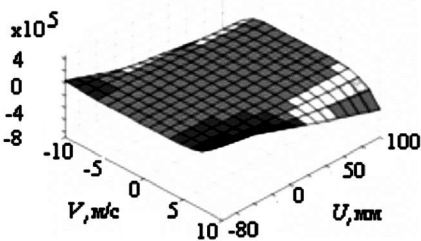


б) Для координат частей подвески

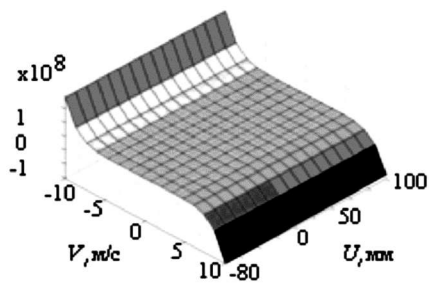
Рисунок 3 – Скелетные кривые нелинейной системы



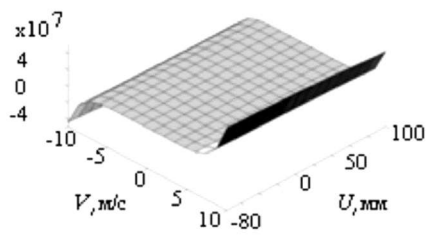
а) Изменение угла поворота  $\alpha$  в зависимости от  $u$  и  $v$



б) Изменение перемещения  $x_1$  в зависимости от  $u$  и  $v$



в) Скорость переменной  $\alpha$  в зависимости от  $u$  и  $v$



г) Скорость переменной  $x_1$  в зависимости от  $u$  и  $v$

Рисунок 4 – Первая форма колебаний (независимая координата  $z$ )

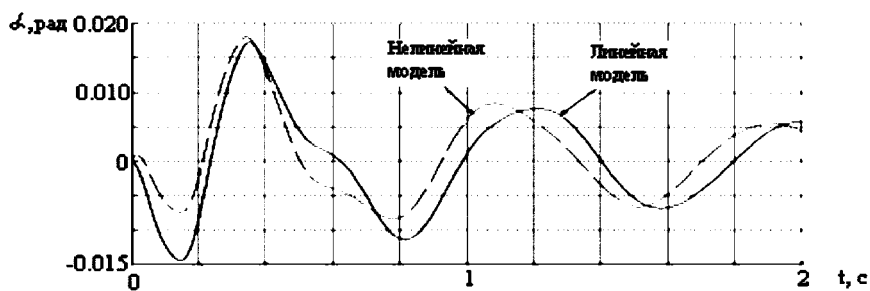


Рисунок 5 – Изменение угла поворота  $\alpha(t)$  (Начальное условие  $z(0) = 100$  мм)

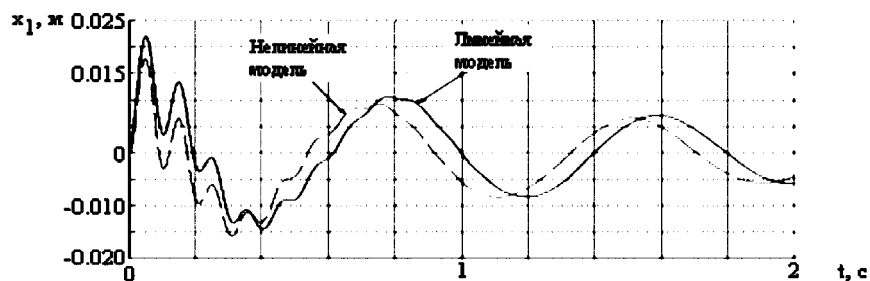


Рисунок 6 – Изменение перемещения  $x_1(t)$  (Начальное условие  $z(0) = 100$  мм)

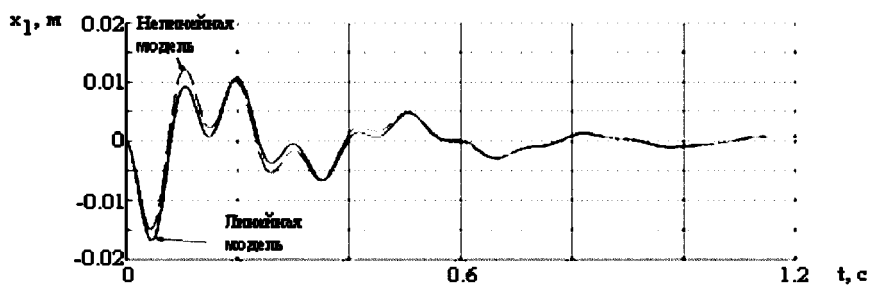


Рисунок 7 – Изменение перемещения  $x_1(t)$  (Начальное условие  $\alpha(0) = 3,5^\circ$ )

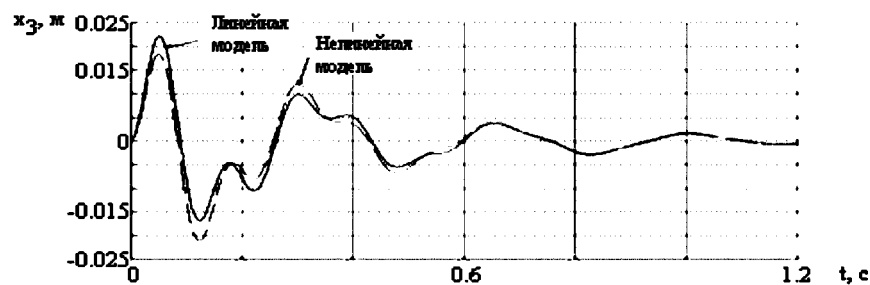


Рисунок 8 – Изменение перемещения  $x_3(t)$  (Начальное условие  $\alpha(0) = 3,5^\circ$ )

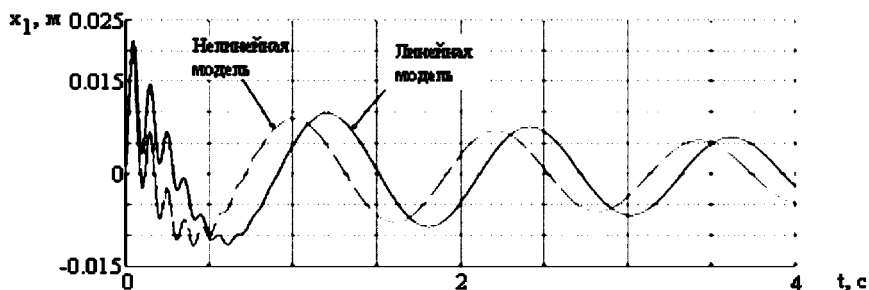


Рисунок 9 – Изменение перемещения  $x_1(t)$  (Начальное условие  $\beta(0) = 6^\circ$ )

**Выводы.** В работе приведены результаты расчета динамики автомобиля на основе нелинейной модели с 7 степенями свободы. Для расчета нелинейных форм колебаний использовался метод, предложенный в работах Пьера и Шоу. Результаты расчета форм колебаний, а также переходных процессов в подвеске, показали значительное влияние нелинейных характеристик пружин на колебательный процесс при значительных начальных отклонениях кузова.

**Список литературы:** 1. *Potemberg P.B.* Подвеска автомобиля. – М., Машиностроение, 1972. 2. *Gaiygori M.M., Mалиновский Е.Ю.* К исследованию динамики системы «дорога-машина-человек. – М.: Машиностроение, 1968. 3. *D.Hrovat.* Optimal Active Suspension Structures for Quarter-car Vehicle Models. // *Automatica.* – Vol. 26, No. 5. – 1990. – P. 845-860. 4. *Semihä Turkyay, Huseyin Akcay.* A study of random vibration characteristics of the quarter-car model // *Journal of Sound and Vibration.* – 282 (2005). – P. 111-124. 5. *Muhammad Haroona, Douglas E. Adams, Yiu Wah Luk, Aldo A. Ferri.* A time and frequency domain approach for identifying nonlinear mechanical system models in the absence of an input measurement // *Journal of Sound and Vibration.* – 283 (2005). – P. 1137-1155. 6. *Hyo-Jun Kim, Hyun Seok Yang, Young-Pil Park.* Improving the vehicle performance with active suspension using road-sensing algorithm // *Computers and Structures.* – 80 (2002). – P. 1569-1577. 7. *Lu, DePoyster.* Multiobjective optimal suspension control. // *IEEE Transactions on control systems technology.* – Vol. 10, No. 6. – November 2002. 8. *S.W.Shaw, C.Pierre.* Normal modes for non-linear vibratory systems // *Journal of Sound and Vibration* 164(1) (1993), P. 85-124. 9. *D.Jiang, C.Pierre, S.W.Show.* Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems // *Journal of Sound and Vibration.* – 272. – 2004. – P. 869-891. 10. *В.Н. Карабан, А.С. Беломытцев.* Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы. – Киев, УМК ВО, 1990.

Поступила в редколлегию 21.04.2006

УДК 539.3

**О.К.МОРАЧКОВСКИЙ**, докт.техн. наук; **В.Н.СОБОЛЬ**; НТУ «ХПИ»

## ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ДИСКА ТУРБИНЫ

У статті розглянута постановка задачі і метод рішення задачі тривалої міцності диска турбіни. Для дисків постійної товщини і перемінного перетину, що ушкоджуються внаслідок повзучості, приведені результати розрахунків напружено-деформованого стану для різних моментів часу аж до руйнування. Проведено аналіз впливу форми перетину диска на час до руйнування.